ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

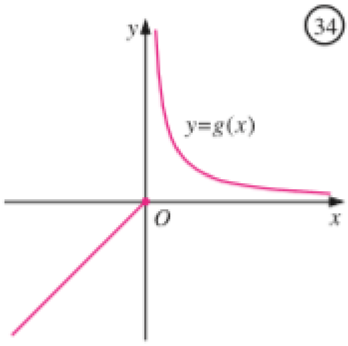
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεωρία (Θεώρημα σελίδα 99 σχολικού βιβλίου)

Α.2 Α) ΨΕΥΔΗΣ

Β) Θα δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα:



Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & ,x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & ,x>0 \end{cases}$, $x\in\mathbb{R}$ που είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Α.3 Θεώρημα (Σελίδα 216 σχολικού βιβλίου)

Α.4 α) ΛΑΘΟΣ, σχολικό βιβλίο σελ. 33

β) ΛΑΘΟΣ, σχόλιο σχολικού βιβλίου σελ. 136

γ) ΣΩΣΤΟ, σχολικό βιβλίο σελ. 53

δ) ΣΩΣΤΟ, σχολικό βιβλίο σελ. 37

ε) ΣΩΣΤΟ, σχολικό βιβλίο σελ. 17

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ με

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3\left(x^3+8\right)>0 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3}<0 \Leftrightarrow x^3\left(x^3+8\right)>0 \Leftrightarrow -2<x<0$

Άρα η συνάρτηση f:

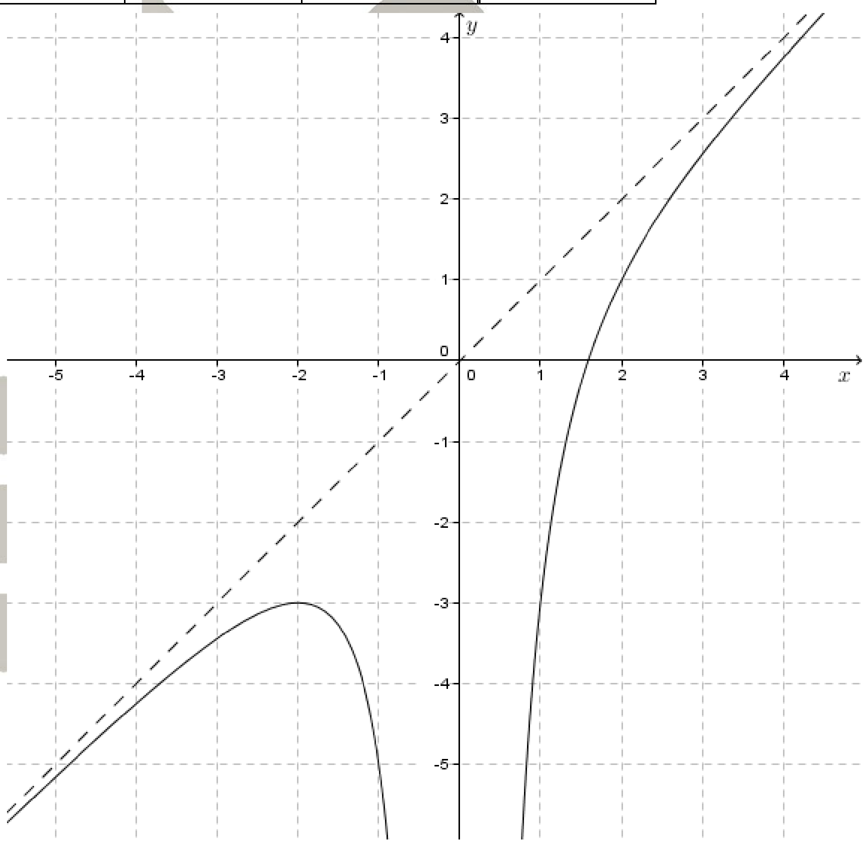
- είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα: $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$
- είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα: $[-2,0)$
- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 το $f(-2)=-3$

Β.2 Η συνάρτηση $f'(x)=\dfrac{x^3+8}{x^3}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ με $f''(x)=\left(1+\dfrac{8}{x^3}\right)'=-\dfrac{24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

Β.3

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$. Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στο διάγραμμα της f
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$. Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη στο διάγραμμα της f και στο $+\infty$ και $-\infty$.

x	$-\infty$	-2	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
f	↗	↘	↗



ΘΕΜΑ Γ

1ος τρόπος (Με ύλη Α΄ Λυκείου)

Γ.1 Η πλευρά του τετραγώνου που θα σχηματιστεί θα είναι $\dfrac{x}{4}$ ενώ για την ακτίνα ρ του κύκλου που θα σχηματιστεί έχουμε: $2\pi\rho = 8 - x \Rightarrow \rho = \dfrac{8-x}{2\pi}$. Έτσι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \ldots = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{\pi+4}{16\pi}\cdot x^2 - \frac{4}{\pi}x + \frac{16}{\pi}\ ,\ 0 < x < 8$$

Γ.2 Η συνάρτηση αυτή ως τριώνυμο με $\alpha = \frac{\pi+4}{16\pi} > 0$, $\beta = -\frac{4}{\pi}$ και $\gamma = \frac{16}{\pi}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = \ldots = \frac{32}{\pi+4}$. Για $x = \frac{32}{\pi+4}$, η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ ενώ η διάμετρος του κύκλου θα είναι: $2\rho = 2 \cdot \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \ldots = \frac{8}{\pi+4}$. Άρα όταν το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο τότε η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ.3 Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = E(x) - 5 = \frac{\pi+4}{16\pi} \cdot x^2 - \frac{4}{\pi}x + \frac{16}{\pi} - 5$ με $0 < x < 8$.

Έτσι: $E(x) = 5 \Leftrightarrow E(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Επειδή $f(0) = \frac{16}{\pi} - 5 > 0$ και $f(8) = \ldots = -1 < 0$.

Άρα το τριώνυμο $f(x)$ έχει δύο ρίζες και μάλιστα η μία μόνο εκ των δύο βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 8.

Σημείωση:

Ο παραπάνω ισχυρισμός οφείλεται στο ότι ένα τριώνυμο έχει ετερόσημες τιμές του α, μόνο για τις τιμές του x μεταξύ των δύο ριζών του. Οπότε αφού η τιμή του τριωνύμου στο 0 και στο 8 είναι μεταξύ τους ετερόσημες το τριώνυμο έχει δύο ρίζες και η τιμή $f(0)$ που είναι ομόσημη του $\alpha = \frac{\pi+4}{16\pi} > 0$ βρίσκεται εκτός των ριζών ενώ η άλλη η $f(8)$ που είναι ετερόσημη του $\alpha = \frac{\pi+4}{16\pi} > 0$ βρίσκεται μεταξύ των ριζών του. Άρα μεταξύ του 0 και του 8 υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της f.

2ος τρόπος (Με ύλη Γ΄ Λυκείου)

Γ.1 Όπως παραπάνω

Γ.2 Η συνάρτηση $E(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ με

$$E'(x) = \left(\frac{\pi+4}{16\pi} \cdot x^2 - \frac{4}{\pi}x + \frac{16}{\pi}\right)' = \frac{\pi+4}{8\pi} \cdot x - \frac{4}{\pi}$$

- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi+4}{8\pi} \cdot x - \frac{4}{\pi} > 0 \Leftrightarrow \frac{32}{\pi+4} < x < 8$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{32}{\pi+4}$

Άρα για $x = \frac{32}{\pi+4}$ η συνάρτηση E παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ.3 Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x)$ στο $[0,8]$.

Αν $A_1 = \left[0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ τότε το σύνολο τιμών του A_1 είναι: $E(A_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), f(0)\right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right]$.

Αν $A_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right]$ τότε το σύνολο τιμών του A_2 είναι: $E(A_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), f(8)\right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right]$.

Παρατηρούμε ότι: $5 \in \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right]$ ενώ $5 \notin \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right]$.

Άρα υπάρχει ένα μόνο $x_0 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right) \subseteq (0,8)$ τέτοιο, ώστε $E(x)=5$

Σημείωση:

Η επιλογή να εργαστούμε με θ. Bolzano δεν συμφέρει γιατί θα χρειαστεί μετά να υπολογίσουμε πάλι τα σύνολα τιμών για να τεκμηριώσουμε τη μοναδικότητα της ρίζας.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2=2\left(e^{x-\alpha}-1\right)$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)=0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}-1=0 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)>0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}-1>0 \Leftrightarrow x-\alpha>0 \Leftrightarrow x>\alpha$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)<0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<\alpha$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x=\alpha$ μοναδικό σημείο καμπής.

Δ.2 Στο διάστημα $A_1=(-\infty,\alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το σύνολο τιμών της παραγώγου στο διάστημα αυτό είναι: $f'(A_1)=\left[f'(\alpha), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$.

Όμως $\alpha>1 \Rightarrow -2\alpha<-2 \Rightarrow 2-2\alpha<0$. Άρα $0\in[2-2\alpha,+\infty)$, οπότε υπάρχει και μάλιστα ακριβώς ένα $x_1\in(-\infty,\alpha]$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$. Επίσης ισχύει:

- $x<x_1 \Rightarrow f'(x)>f'(x_1)=0$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,x_1]$

- $x_1<x<\alpha \Rightarrow f'(x)<f'(x_1)=0$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_1,\alpha]$

  Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο.

Στο διάστημα $A_2=[\alpha,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε το σύνολο τιμών της παραγώγου στο διάστημα αυτό είναι: $f'(A_2)=\left[f'(\alpha), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$. Οπότε υπάρχει πάλι και μάλιστα ακριβώς ένα $x_2\in[\alpha,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=0$. Επίσης ισχύει:

- $\alpha<x<x_2 \Rightarrow f'(x)<f'(x_1)=0$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha,x_2]$. Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

- $x>x_1 \Rightarrow f'(x)>f'(x_1)=0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[x_1, +\infty\right)$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_2 τοπικό μέγιστο.

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται και στον παρακάτω πίνακα:

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td colspan="2">x_1</td><td colspan="2">α</td><td colspan="2">x_2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f''</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td>f</td><td colspan="4">∪</td><td colspan="4">∪</td></tr>
<tr><td>f'</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">−</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="3">f</td><td colspan="2">↗</td><td colspan="2">↘</td><td colspan="2">↘</td><td colspan="2">↗</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">↘</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">τ. μέγιστο</td><td colspan="4">τ. ελάχιστο</td></tr>
</table>

Δ.3 $f'(x_1) = 0 \Rightarrow e^{x_1-\alpha} - x_1 = 0 \Rightarrow e^{x_1-\alpha} = x_1$ (1) Όμως: $x_1 < \alpha \Rightarrow x_1 - \alpha < 0 \Rightarrow e^{x_1-\alpha} < 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 < 1$

Επειδή στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε: $x_1 < 1 < \alpha < x_2 \Rightarrow f(1) > f(\alpha) > f(x_2)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, x_2) αφού αν η εξίσωση αυτή είχε μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\alpha, x_0)$ τότε επειδή είναι και «1-1» θα ίσχυε η συνεπαγωγή: $f(x_0) = f(1) \Rightarrow x_0 = 1$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\alpha > 1$.

Δ.4 Για $\alpha = 2$ έχουμε: $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$ και $f''(x) = 2\left(e^{x-2} - 1\right)$. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2) = -2)$ είναι: $\varepsilon : y + 2 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x + 2$. Επειδή η συνάρτηση στο $[2,3] \subseteq [2, +\infty)$ είναι κυρτή θα ισχύει:

$$f(x) \geq -2x + 2 \overset{x \geq 2}{\Rightarrow} f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2} \Rightarrow \int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\,dx$$

Όμως $\displaystyle\int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\,dx = -2\int_2^3 (x-1) \cdot \sqrt{x-2}\,dx \underset{dx=2udu}{\overset{u=\sqrt{x-2} \Rightarrow u^2 = x-2 \Rightarrow x = u^2+2}{=}} = -2\int_0^1 2\left(u^2+1\right)u^2\,du =$

$$-4\int_0^1 \left(u^4 + u^2\right)du = -4\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -4\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right] = -2\frac{8}{15} = -\frac{32}{15}$$

Άρα: $\displaystyle\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$

Κώστας Βακαλόπουλος

Μαθηματικός, MSc in Statistics